Baccalauréat Blanc

Session 2017

MATHEMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Noté sur 80.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 1 *QCM (54 points : bonne réponse +3, réponse fausse -1)*

Sur votre copie écrire le N° de la question et la lettre de la bonne réponse choisie *(une seule réponse)*

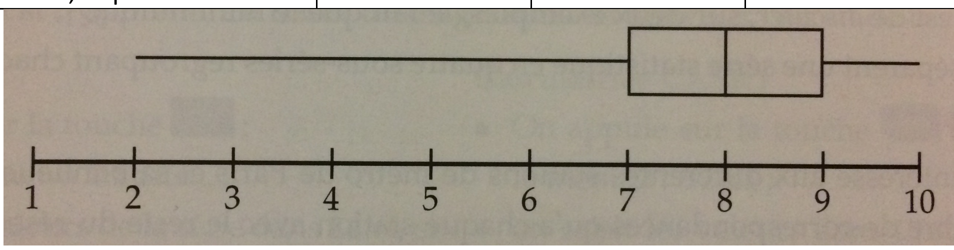
N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D	Réponse E
1	Donner l'expression de la dérivée de la fonction f $f(x) = (2x^3 + 1)\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{8x^3 + 1}{\sqrt{x}}$	$f'(x) = (12x^3 + 6x^2) \times\sqrt{x}$	$f'(x) = (8x^3 + 1) \times\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{6x^2}{2\sqrt{x}}$	$\boldsymbol{f'(x) = \frac{14x^3 + 1}{2\sqrt{x}}}$
2	Donner l'expression de la dérivée de la fonction f $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2}$	$f'(x) = \frac{4x - 4x^3}{x^4}$	$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{6}{x^3}}$	$f'(x) = \frac{4x}{x^4}$	$f'(x) = \frac{4x + 3}{x^2}$	$f'(x) = \frac{4x - 4x^3}{x^4}$
3	La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 120x$ admet un extremum local?	Un maximum local en $x = -\frac{19}{3}$	Pas d'extremum local	Un minimum local en $x = \frac{19}{3}$	**Un minimum local en $\boldsymbol{x = 2\sqrt{10}}$ et un maximum local symétrique par rapport à l'origine O.**	Un maximum local en $x = -\frac{19}{3}$ et un minimum local en $x = \frac{19}{3}$
4	Soit I milieu de [AB] et M un point de la médiatrice. Que vaut $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$?	$\boldsymbol{IM^2 - \frac{1}{4}AB^2}$	$AM \times BM$	$IM^2 + \frac{1}{4}AB^2$	$2AM \times BM$ -AB^2	$\frac{1}{2}AM \times BM$
5	Soit le carré ABCD de centre O et de côté 2cm Que vaut le produit scalaire $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).\overrightarrow{AB}$	8	4	**0**	-4	-8
6	Soit la fonction f $f(x) = \frac{(3x-5)^2}{(2x+1)^2}$ et la suite (u_n) : $u_n = f(n)$ Que vaut la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?	Elle n'existe pas	$\boldsymbol{\frac{9}{4}}$	$\frac{3}{2}$	-5	$+\infty$
7	Résoudre l'équation sur l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$: $\cos(2x) = \cos(x + a)$ $avec\ a \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$	$-\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi$	$\boldsymbol{-\frac{a}{3} - \frac{2\pi}{3};\ -\frac{a}{3};\ a;\ -\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}}$	$-a - \frac{3\pi}{4};$ $-a - \frac{\pi}{4};$ $a;\ a + \frac{\pi}{4};$ $a + \frac{3\pi}{4}$	$a - \pi;\ a - \frac{\pi}{2};$ $a;\ a + \frac{\pi}{2};$	$-\frac{a}{3} - \frac{2\pi}{3};$ $-\frac{a}{3} - \frac{\pi}{3}; -\frac{a}{3};$ $\frac{a}{3}; \frac{a}{3} + \frac{\pi}{3};$ $\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}$
8	Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 3. Que vaut la somme S_n des $n + 1$ premiers termes de la suite de l'indice 0 à n ?	$S_n = \frac{3n(n+1)}{2}$	$S_n = 6n(n+1)$	$\boldsymbol{S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}}$	$S_n = \frac{2n(n+1)}{3}$	$S_n = \frac{3n^2 - n - 2}{2}$

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D	Réponse E
9	Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Que vaut la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite de l'indice 0 à n ?	$S_n = \frac{1-2^n}{-1}$	$S_n = \frac{1-3^{n+1}}{-2}$	$S_n = \frac{1-2^n}{-2}$	$S_n = \frac{1-3^{n+1}}{-2}$	$S_n = 3(2^{n+1}-1)$
10	Soit la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{3}n^3 - n^2 + 3$ Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?	La suite (u_n) est croissante à partir du rang 2	La suite (u_n) est décroissante	La suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2	La suite (u_n) est croissante	La suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.
11	Donner l'expression de la dérivée de la fonction f $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2x}$	$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x^2}$	$f'(x) = -\frac{3}{2(\sqrt{x})^2}$	$f'(x) = \frac{-3\sqrt{x}}{2x^2}$	$f'(x) = \frac{-3\sqrt{x}}{2}$
12	$\sin(x+\pi)\times\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x-\pi)\times\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) =$	$1 - 2\,sin^2x$	-1	0	1	$1 - 2\,cos^2x$
13	$\sin(x-\pi)\times\sin(-x) - \cos(-x)\times\cos(\pi - x) =$	$1 - 2\,sin^2x$	-1	0	1	$1 - 2\,cos^2x$
14	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x+\pi)\times\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) =$	$1 - 2\,sin^2x$	-1	0	1	$1 - 2\,cos^2x$
15	$(\vec{u},\vec{w}) - (\vec{v},\vec{w}) + (\vec{v},\vec{u}) =$	0	π	$-\pi$	$2(\vec{u},\vec{v})$	$-2(\vec{u},\vec{v})$
16	Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ *et si* $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n + n + 3$	(u_n) est une suite arithmétique	(u_n) est une suite croissante	(u_n) a pour limite 3 quand n tend vers $+\infty$	$u_n = 2 + 3n$ pour tout n de $\mathbb{N}$	u_3 =17

17

Nombre de jours	2	3	4	5	6	7
Effectif	1	11	25	33	23	7

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D	Réponse E
17	Ci dessus, on a relevé le temps de guérison en jours chez 100 personnes enrhumées. Le couple (moyenne;écart type) arrondi à 0,01 près vaut :	(5 ; 2)	(2 ; 5)	(1,13 ; 4,87)	(4,87 ; 1,13)	On ne peut pas savoir



18

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D	Réponse E
18	On considère le diagramme en dessus :	Le minimum est 1	La médiane est 5	Le troisième quartile est 9	L'étendue est 9	L'effectif est 10

1E 2B 3D 4A 5C 6B 7B 8C 9E 10A 11D 12C 13D 14E 15A 16B 17D 18C
21B 22B 23 C 24E 25B 26D 27A 28C 29E 30A 31B 32D 33C 34E 35 A 36D 37C 38 D

Exercice 2 (8 points :2+2+1+1+2)

On considère un triangle ABC. Soit les points D et E tels que :
$\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ *or* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$ *donc en remplaçant* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ *or* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ *en remplaçant*:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ *donc* $\boldsymbol{\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}$

2) Exprimer $\overrightarrow{EB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$ *or* $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CA}$ *soit* $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AC}$*et* $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ *donc en remplaçant les 2 expressions*:

$\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ *donc* $\boldsymbol{\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}$

3) En déduire $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{4\overrightarrow{AC}}$

$\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{2\overrightarrow{AB}}$

4) En déduire $EB^2 - AD^2$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD}) = EB^2 - AD^2$ et en calculant autrement en utilisant les résultats du 3) :

$(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD}) = (4\overrightarrow{AC}).(2\overrightarrow{AB}) = 4\times2(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}) = 8\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Donc $\boldsymbol{EB^2 - AD^2 = 8\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}$

5) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les longueurs EB et AD pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$ or d'après le 4) : $EB^2 - AD^2 = 8\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $EB^2 - AD^2 = 0 \Leftrightarrow EB = AD$ car les distances sont toujours positives ou nulles.

<u>On a démontré que</u> : **Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\boldsymbol{EB = AD}$**

Exercice 3 (10 points :1+1+1+2+1+1+1+1+1)

Un grand lessivier commercialise son produit pour lave-vaisselle sous forme solide. Les doses se présentent sous forme de parallélépipède rectangle de dimensions x, y et $2x$ en centimètres ($1 \leq x \leq 2$). Chaque lavage nécessite une dose d'un volume d'environ 12 cm^3.

Pour économiser l'emballage, on cherche à avoir une surface totale minimale.

1) Faire un schéma et exprimer y en fonction de x.

Le volume V du parallélépipède rectangle de dimensions x, y et $2x$ en centimètres vaut :

$$V = x \times y \times 2x = 2x^2y = 12 \; donc \; \boldsymbol{y = \frac{6}{x^2}}$$

2) Montrer que la surface totale de ce parallélépipède est $S(x) = 4x^2 + \frac{36}{x}$ pour $x \in [1; 2]$.

$S(x) = 2 \times 2x \times x + 2 \times 2x \times y + 2 \times x \times y = 4x^2 + 6xy = 4x^2 + 6x \times \frac{6}{x^2} = \boldsymbol{4x^2 + \frac{36}{x}}$

3) Déterminer le signe de $S'(x)$ en fonction de celui de $x^3 - \frac{9}{2}$.

S est la somme d'une fonction polynôme et d'une fonction inverse qui sont toutes les 2 dérivables sur $[1; 2]$ donc S est dérivable sur $[1; 2]$ $et\ S'(x) = 8x - \frac{36}{x^2} = 8\left(x - \frac{9}{2x^2}\right) = \frac{8}{x^2}\left(x^3 - \frac{9}{2}\right)$

$si\ x \in [1; 2]\ alors\ \frac{8}{x^2} > 0\ \ donc\ \boldsymbol{S'(x)\ est\ du\ signe\ de\ \left(x^3 - \frac{9}{2}\right)}$

4) Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction $u: x \to x^3 - \frac{9}{2}$

u est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ $et\ u'(x) = 3x^2$. La fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$et nulle en 0 uniquement donc la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0	1	x_0	2		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$u(x)$	↗		$\boldsymbol{-\frac{9}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{7}{2}}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\frac{7}{2}}$		↗

5) En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution a dans $[1; 2]$ et en donner une valeur approchée à la calculatrice à 0,1 près.

La fonction u est **strictement croissante** sur $[1; 2]$ $et\ \boldsymbol{u(1)} = -\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}\ \boldsymbol{et\ u(2)} = \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}$ donc quand

$x \in [1; 2]\ u(x)\ prend\ toutes\ les\ valeurs\ entre\ -\frac{7}{2} et \frac{7}{2}\ (vous\ direz\ en\ Term\ S$:

"car la fonction u est continue sur $[1;2]$ ") $donc\ il\ existe\ un\ unique\ x_0\ , x_0\ \in [1; 2]\ tel\ que\ u(x_0) = 0$

$$x_0{}^3 - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x_0{}^3 = \frac{9}{2} \;\; \Leftrightarrow \boldsymbol{x_0} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{2}}} = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} \approx 1{,}65096362 \approx \boldsymbol{1,7}$$

6) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

La fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $u(x_0) = 0\ avec\ \boldsymbol{x_0} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx \boldsymbol{1,7}$ donc :

- **si $\boldsymbol{x < x_0}$ alors $\boldsymbol{u(x)} < 0$**
- **si $\boldsymbol{x > x_0}$ alors $\boldsymbol{u(x)} > 0$**

7) En déduire le tableau de variation de S.

Au 3) on a vu que $S'(x)\ est\ du\ signe\ de\ u(x) = \left(x^3 - \frac{9}{2}\right)$ donc :

- si $x < x_0$ alors $S'(x) < 0$ et S strictement décroissante sur $[1; x_0]$
- si $x > x_0$ alors $S'(x) > 0$ et S strictement croissante sur $[x_0; 2]$

x	**1**		$\boldsymbol{x_0}$		**2**
$S'(x)$		**-**	**0**	**+**	
$S(x)$	40 ↘		$\approx \mathbf{32,7}$		↗ 34

8) Quelle valeur de x rend S minimale ?

$\boldsymbol{x_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx 1,7}$ **rend S minimale et** $\boldsymbol{S(x_0) \approx 32,7}$

9) Quelles sont les dimensions de la dose correspondante ?

Les dimensions de la dose correspondante sont :

$\boldsymbol{x_0 \approx 1,65096\ , 2x_0 \approx 3,30193\ et\ \frac{6}{x_0{}^2} \approx 2,20128}\ soit\ arrondi\ au\ mm: \boldsymbol{1,7cm\ ; 3,3cm\ et\ 2,2cm}$

<u>Exercice 4</u> *Une grand-mère généreuse* (8 points :1+2+(2+1+2))

A la naissance d'Alban, sa grand-mère dépose sur un compte bancaire 100€ et décide d'augmenter ses versements de 2% à chaque anniversaire. On suppose qu'Alban n'effectue aucun versement ni retrait d'argent sur ce compte et que le compte ne produit aucun intérêt.

Pour tout entier n , on note :

- a_n la somme versée par la grand-mère d'Alban pour son $n - ième$ anniversaire et $a_0 = 100$
- S_n la somme totale disponible sur le compte bancaire d'Alban après son $n - ième$ anniversaire :

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

1) Préciser la nature de la suite (a_n). En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Sa grand-mère décide d'augmenter ses versements de 2% à chaque anniversaire, cela revient à multiplier le précédent versement par 1,02. Donc $a_n = 1{,}02 \times a_{n-1}$

La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $a_0 = 100$

$$\boldsymbol{a_n} = 1{,}02^n \times a_0 = \mathbf{1,02^n \times 100}$$

2) Montrer que pour tout entier n , $S_n = 5000 \times (1{,}02^{n+1} - 1)$

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 100 \times (1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \ldots + 1{,}02^n) = 100 \times \frac{1 - 1{,}02^{n+1}}{1 - 1.02}$$

$$S_n = 100\times\frac{1-1{,}02^{n+1}}{-0{,}02} = -5000\times(1-1{,}02^{n+1}) = \mathbf{5000\times(1{,}02^{n+1}-1)}$$

3) Alban rêve d'acheter une guitare, qui coûte 1999€. Pour savoir à partir de quel âge il pourra se l'offrir, on propose l'algorithme incomplet ci-dessous :

Variables
N : entier
A, S : réels
Traitement
N prend la valeur 0
A prend la valeur 100
S prend la valeur 100
Tant Que **S<1999**
N prend la valeur $N + 1$
A prend la valeur $A\times$ **1,02**
S prend la valeur $S +$ **A**
FinTantQue
Afficher **N**
Fin

a) Que représentent les variables N, A et S ? Compléter les pointillés dans l'algorithme ci-dessus en recopiant l'algorithme complet **sur votre copie**.

La variable N représente l'âge d'Alban, le n de a_n et de S_n et à la fin de l'algorithme l'âge où Alban pourra s'offrir une guitare

La variable A représente la somme versée au nième anniversaire, les valeurs successives de a_n en commençant à $n = 0$.

La variable S représente la somme disponible sur le compte, les valeurs successives de S_n en commençant à $n = 0$.

Algorithme voir ci-dessus

b) En utilisant le résultat de la question 2) et en n'utilisant que les variables N et S, modifier l'algorithme sur votre copie de façon à résoudre le problème posé.

Variables
N : entier
S : réels
Traitement
N prend la valeur 0
S prend la valeur 100
Tant Que S<1999

N prend la valeur $N+1$
S prend la valeur $5000\times(1{,}02^{n+1}-1)$
FinTantQue
Afficher N
Fin

c) Programmer un des 2 algorithmes précédents, puis indiquer à partir de quel âge Alban pourra s'offrir la guitare.

Age	a_n	S_n
0	100	100
1	102	202
2	104,04	306,04
3	106,1208	412,1608
4	108,24322	520,40402
5	110,40808	630,8121
6	112,61624	743,42834
7	114,86857	858,29691
8	117,16594	975,46284
9	119,50926	1094,9721
10	121,89944	1216,8715
11	124,33743	1341,209
12	126,82418	1468,0332
13	129,36066	1597,3938
14	131,94788	1729,3417
15	134,58683	1863,9285
16	**137,27857**	**2001,2071**

A 16 ans Alban pourra s'acheter une guitare